PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) Determine la ecuación del plano π que pasa por el punto P(1, 2, 1) y es paralelo a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} -x-y+z+1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$.

Los vectores directores de las rectas r y s son vectores linealmente dependientes de los productos vectoriales de los vectores normales de los planos que las determinan, que son, respectivamente, los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}=(1,\ 1,\ -2)\ y\ \overrightarrow{v_1}=(2,\ -1,\ -1).$$

$$s \equiv \begin{cases} -x-y+z+1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2}=(-1,\ -1,\ 1)\ y\ \overrightarrow{v_2}=(0,\ 1,\ 1).$$

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-i-4j-k-2k-2i+j=-3i-3j-k=(-3,\ -3,\ -3) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)}.$$

$$\overrightarrow{v'_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-i-k-i+j=-2i+j-k=(-2,\ 1,\ -1) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s}=(2,\ -1,\ 1)}.$$

El plano pedido π tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,\ -1,\ 1)$ y contiene al punto P(1, 2, 1); su expresión general es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$(x-1)+2(y-2)-(z-1)-2(z-1)+(x-1)-(y-2)=0\ ;;\ 2(x-1)+(y-2)-3(z-1)=0\ ;;$$

$$2x-2+y-2-3z+3=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi\equiv 2x+y-3z-1=0}}.$$

****

2º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & 4 \\ -1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

b) Calcule, si es posible, la matriz inversa de A para m = 1.

c) Si B es la matriz inversa de A y $|A|=5$, ¿cuánto vale det(B)?

----

a)

Una matriz es inversible cuando el valor de su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & 4 \\ -1 & 3 & m \end{vmatrix}=m^3+m^2-12m=m\left(m^2+m-12\right)=0 \Rightarrow m_1=0 \;;;\; m^2+m-12=0 \;;;$$

$$m=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2} \Rightarrow \underline{m_2=-4} \;;;\; \underline{m_3=3}.$$

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall m \in R-\{-4,\ 0,\ 3\}}}$$

b)

Para m = 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Para hallar A^{-1} utilizamos el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_2+F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3-3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to -\tfrac{1}{10}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1-F_3 \\ F_2 \to F_2-4F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{11}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

c)

Teniendo en cuenta que si $B = A^{-1} = \frac{1}{A} \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{1}{5}}}$.

****

3º) Demuestre que la función polinómica $f(x)=x^3-3x+\sqrt{2}$ no puede tener dos raíces en el intervalo $[0,\ 1]$. ¿Cuántas raíces tiene en $[0,\ 1]$?

La función polinómica $f(x)=x^3-3x+\sqrt{2}$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo cual, lo será en cualquier intervalo real que se considere.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Teniendo en cuenta que $f(0)=\sqrt{2}>0\ \ y\ \ f(1)=1-3+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1<0$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función f(x) tiene, al menos, una raíz real x = α.

Vamos a demostrar ahora que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real positiva en el intervalo (0, 1), x = β, indicaría que f(β) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle que dice que: "Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que $f'(c)=0$".

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=0\ ;;\ \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=1}.$$

Como quiera que los valores que anulan la derivada no pertenecen al intervalo $(0,\ 1)$, la función f(x) no puede tener dos raíces en [0, 1], como teníamos que demostrar.

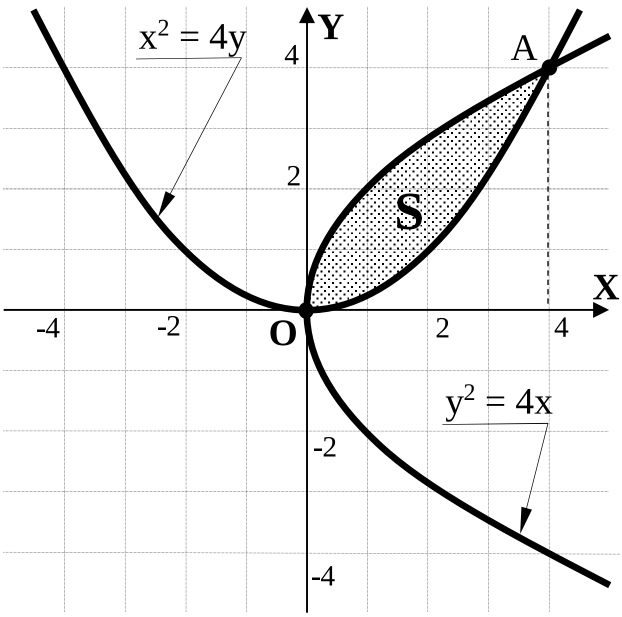
Mediante el teorema de Bolzano y considerando el párrafo anterior se deduce que

la función f(x) tiene una sola raíz en el intervalo [0, 1].

****

4º) Calcule el área de la región limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$. Haga un dibujo aproximado de la figura.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



Los puntos de corte de las parábolas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 4x \;;;$$

$$\frac{x^4}{16} = 4x \;;; \; x^4 = 64x \;;; \; x^4 - 64x = 0 \;;;$$

$$x\left(x^3 - 64\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 4 \rightarrow \underline{A(4,\ 4)} \end{cases}.$$

Como se aprecia en la figura, las ordenadas de la parábola $y^2 = 4x$ son iguales o mayores que las ordenadas correspondientes a la parábola $x^2 = 4y$ en el intervalo correspondiente al área a calcular, por lo cual, el área pedida es:

$$S = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \left[\frac{4}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - \frac{4^3}{12}\right) - 0 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}\ u^2}} = S.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{pmatrix}$.

a) Resuelve la ecuación $|A|=0$.

b) ¿En qué casos admite inversa la matriz A?

----

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 1 & x & x \end{vmatrix}=0 \;;\; \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & -x \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=0 \;;$$

$$x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=x_2=0}} \;;\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & x & x-1 \end{vmatrix}=0 \;;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & x-1 \end{vmatrix}=0 \;;\; x-1+x=0 \;;\; 2x=1 \Rightarrow \underline{\underline{x_3=\frac{1}{2}}}.$$

b)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall x \in R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}}}$$

****

2º) Obtenga el plano π que pasa por el punto P(3, 2, 7) y por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x - y + z - 4 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z + 7 = 0$.

El haz de planos que determinan $\pi_1 \equiv x - y + z - 4 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z + 7 = 0$ viene dado en forma general como $\alpha \equiv x - y + z - 4 + \lambda(x + y - z + 7) = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto P(3, 2, 7) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y + z - 4 + \lambda(x + y - z + 7) = 0 \\ P(3,\ 2,\ 7) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 2 + 7 - 4 + \lambda \cdot (3 + 2 - 7 + 7) = 0 \ ;;\ 4 + 5\lambda = 0 \ ;;$$

$$\underline{\lambda = -\frac{4}{5}} \Rightarrow \pi \equiv x - y + z - 4 - \frac{4}{5}(x + y - z + 7) = 0 \ ;;\ 5x - 5y + 5z - 20 - 4x - 4y + 4z - 28 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 9y + 9z - 48 = 0}}$$

****

3º) Considere la función $f(x)=\frac{k\cdot e^x}{1+x^2}$.

a) Determine el valor de k para que la pendiente de la recta tangente a la función en $x=0$ tenga el valor 3.

b) Dado el valor de k obtenido en el apartado anterior, estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x).

----

a)

El valor de la pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{k\cdot e^x\cdot(1+x^2)-k\cdot e^x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{k\,e^x\,(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=\underline{\frac{k\,e^x\,(x-1)^2}{(1+x^2)^2}=f'(x)}.$$

$$m=f'(0)=3\Rightarrow\frac{k\,e^0\,(0-1)^2}{(1+0^2)^2}=3\ ;;\ \frac{k}{1}=3\ ;;\ \underline{\underline{k=3}}.$$

b)

Para k = 3 es $f(x)=\frac{3e^x}{1+x^2}$ y $f'(x)=\frac{3e^x\,(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Como quiera que $f'(x)=\frac{3e^x\,(x-1)^2}{(1+x^2)^2}>0,\ \forall xR$:

<u>La función f(x) es creciente en su dominio, que es R.</u>

****

4º) Calcule la integral $I=\int L(x+1)\cdot dx$.

$$I=\int L(x+1)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} L(x+1)=u \;\rightarrow\; \frac{1}{x+1}\cdot dx=du \\ dx=dv \;\rightarrow\; v=x \end{array}\right\} \Rightarrow I=L(x+1)\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\cdot dx=$$

$$=xL(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\cdot dx=xL(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}\cdot dx=xL(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx=xL(x+1)-$$

$$-\int dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx=xL(x+1)-x+L(x+1)+C=\underline{\underline{(x+1)L(x+1)-x+C=I}}\,.$$

****